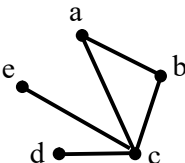
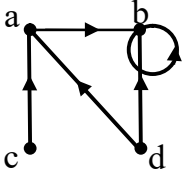


مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع:	رشته: ریاضی	سوالات امتحان درس: ریاضیات گسسته
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان:	نام و نام خانوادگی:	
		پایه دوازدهم متوسطه دوم در دیماه	
بارم	سوالات		ردیف
۱	بدون دلیل آوردن فقط صحیح یا غلط بودن عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر عدد فرد به شکل $6k + 1$ است. ب) مجموع دو عدد صحیح متوالی عددی زوج است. پ) اگر $a b$ آنگاه $ a \leq b $. ت) تعداد راس های فرد هر گراف عددی زوج است.		۱
۱/۲۵	جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید. الف) اعداد صحیح در تقسیم بر ۵، بر حسب باقیمانده به مجموعه افراز می شوند. ب) اگر $d = (30, 48)$ در این صورت d است. پ) اگر $x \equiv 2$ در این صورت $4x \equiv \dots$ است. ت) یک گراف n راسی حدکثر یال و حداقل یال دارد.		۲
۲	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $9^n - 1$ بر ۸ بخش پذیر است. ب) اگر برای هر سه مجموعه A, B, C داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$. پ) اگر $a b$ و $b c$ آنگاه $a c$.		۳
۱/۲۵	با برهان خلف ثابت کنید اگر a_1, a_2, a_3 سه عدد صحیح باشند و b_1, b_2, b_3 همان سه عدد ولی با ترتیبی دیگر باشند آنگاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است؟		۴
۱	با روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: اگر $x < 0$ آنگاه $x + \frac{1}{x} \leq -2$		۵
۱/۲۵	ثابت کنید اگر $a b$ آنگاه: $[a, b] = b $		۶
۱/۲۵	اگر باقیمانده تقسیم اعداد n, m بر ۱۳ به ترتیب ۶ و ۹ باشند، در اینصورت باقیمانده تقسیم $3n - 4m$ بر ۱۳ را به دست آورید.		۷
۱/۵	ثابت کنید مربع هر عدد صحیح و فرد مانند a به شکل $8q + 1$ نوشته می شود.		۸
۰/۷۵	i. فرض $a = 6k$ در اینصورت کدام رابطه ی عاد کردن را نمی توان نتیجه گرفت؟ الف) $2 a$ ب) $6 a$ پ) $k a$ ii. از $a \equiv b \pmod{m}$ کدام نتیجه می توان گرفت؟ الف) $a m - b$ ب) $b m - a$ پ) $m a - b$ iii. عدد ۲۰۱۸ به کدام دسته همنهشتی به پیمانه ی ۹ قرار دارد: الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴		۹
	«ادامه ی سوالات در صفحه ی بعد»		

۱۰	باقیمانده ی تقسیم عدد $17 + 13^8 = A$ بر ۷ را بیابید.	۱/۲۵
۱۱	ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم: $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$	۱/۲۵
۱۲	جواب های عمومی معادله ی سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۳	به چند طریق می توان از بین ۲ نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد.	۰/۷۵
۱۴	در گراف G داریم: $V(G) = \{a, b, c, d\}$ و $E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, b), (d, b), (d, a), (c, a)\}$ (الف) گراف G را رسم کنید. (ب) آیا این گراف همبند است؟	۰/۵
۱۵	با توجه به شکل گراف به سوالات پاسخ دهید. (الف) $N_G(g)$ را مشخص کنید. (ب) یک یال مجاور cb بنویسید. (پ) راس مجاور e را بنویسید. (ت) $\delta(G), \Delta(G)$ را مشخص کنید. (ث) یک مسیر از a به c به طول ۳ بنویسید.	۱/۵
۱۶	فرض G یک گراف با مرتبه p و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد. ثابت کنید: $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$	۱/۵
۱۷	(الف) گرافی ۶ راسی و ۳-منتظم رسم کنید. (ب) گراف کامل ۵ راسی چند یال دارد؟ (پ) مکمل گراف زیر را رسم کنید.	۰/۷۵
		
۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »

راهنمای تصحیح سوالات امتحان درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی
دانش آموزان پایه دوازدهم متوسطه دوم در دیماه		تاریخ امتحان:
ردیف	راهنمای تصحیح سوالات	بارم
۱	الف) غلط (۰/۲۵) ب) غلط (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)	۱
۲	الف) ۵ (۰/۲۵) ب) ۶ (۰/۲۵) پ) ۱ (۰/۲۵) ت) $n-1$ (۰/۵)	۱/۲۵
۳	الف) $9^n - 1 = (9-1)(9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 1) = 8k$ (۰/۲۵) ب) غلط (۰/۲۵) مثال نقض: A (۰/۲۵) B (۰/۲۵) C (۰/۲۵) پ) $\begin{cases} a b \Rightarrow b = ak \\ b c \Rightarrow c = bk' \end{cases} \Rightarrow c = akk' = ak'' \Rightarrow a c$ (۰/۲۵)	۲
۴	فرض خلف: فرض $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد، پس فرد است. (۰/۵) بنابراین هر یک از اعداد پرانتزها باید فرد باشد (۰/۲۵) و از طرفی جمع سه عدد فرد عددی فرد است (۰/۲۵) یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید فرد باشد. و این تناقض است زیرا جمع آنها ۰ است. (۰/۲۵)	۱/۲۵
۵	$x + \frac{1}{x} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq -2x \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2x \geq 0$ (۰/۲۵) $(x+1)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow$ (۰/۲۵) همواره برقرار	۱
۶	اول: $a b$ پس $ b $ بر a, b بخش پذیر است. (۰/۵) دوم: فرض $m > 0$ و $b m$ (۰/۵) پس داریم: $ b \leq m \Rightarrow b \leq m$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۷	$\begin{cases} m = 13k + 6 \\ n = 13k' + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5m = (-5)13k - 3 \\ 3n = (3)13k' + 27 \end{cases}$ (۰/۲۵) $3n - 5m = 13(-5k + 3k') - 3$ $= 13(-5k + 3k') - 3 + 13 - 13$ (۰/۲۵) $= 13(-5k + 3k' - 1) + (13 - 3)$ (۰/۲۵) $= 13(-5k + 3k') + 10 \rightarrow r = 10$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
«ادامه در صفحه بعد»		

۱/۵	$\begin{cases} a = ۴k \\ a = ۴k + ۱ \text{ فرد} \rightarrow a^۳ = ۱۶k^۳ + ۱۲k^۲ + ۱۲k + ۱ = ۱۲(۲k^۲ + k) + ۱ = ۱۲q + ۱ \text{ (./۵)} \\ a = ۴k + ۲ \\ a = ۴k + ۳ \text{ فرد} \rightarrow a^۳ = ۱۶k^۳ + ۳۶k^۲ + ۹ = ۱۶k^۳ + ۳۶k^۲ + ۱۲k + ۱ \\ = ۱۲(۲k^۳ + ۳k^۲ + k) + ۱ = ۱۲q' + ۱ \text{ (./۵)} \end{cases}$	۸
۰/۷۵	i. (ب) (./۲۵) ii. (پ) (./۲۵) iii. (ب) (./۲۵)	۹
۱/۲۵	$\begin{aligned} ۱۳ \equiv ۶ \text{ (./۲۵)} &\rightarrow ۱۳^۳ \equiv ۶^۳ \equiv ۱ \text{ (./۲۵)} \rightarrow ۱۳^۱ \equiv ۱ \text{ (./۲۵)} \\ A = ۱۳^۱ + ۱۷ \equiv ۱ + ۱۷ \equiv ۴ \text{ (./۲۵)} \end{aligned}$	۱۰
۱/۲۵	$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n \text{ (./۲۵)} \\ &= a^n + ab \left(\binom{n}{1} a^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} b^{n-2} \right) + b^n \text{ (./۲۵)} \\ &= a^n + abk + b^n \text{ (./۲۵)} \\ (a+b)^n &\stackrel{ab}{\equiv} a^n + abk + b^n \stackrel{ab}{\equiv} a^n + \dots + b^n \text{ (./۲۵)} \end{aligned}$	۱۱
۱/۲۵	$\begin{aligned} ۷x + ۵y = ۱۱ &\rightarrow ۷x \equiv ۱۱ \text{ (./۲۵)} \rightarrow x \equiv ۳ \text{ (./۲۵)} \rightarrow \boxed{x = ۵k + ۳} \text{ (./۲۵)} \\ &\rightarrow ۳۵k + ۲۱ + ۵y = ۱۱ \text{ (./۲۵)} \\ &\rightarrow \boxed{y = -۷k - ۲} \text{ (./۲۵)} \end{aligned}$	۱۲
۰/۷۵	$\begin{aligned} x + y = ۹ \text{ (./۲۵)} \\ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۹ \end{cases}, \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۸ \end{cases}, \dots, \begin{cases} x = ۹ \\ y = ۰ \end{cases} \text{ (./۲۵)} \end{aligned}$	۱۳
۰/۵	الف) (./۲۵)  ب) بله (./۲۵)	۱۴
۱/۵	الف) $N_G(g) = \{a, b, c\}$ (./۲۵) ب) ce (./۲۵) پ) c (./۲۵) ت) $\delta(G) = ۰, \Delta(G) = ۳$ (./۵) ث) $agbc$ (./۲۵)	۱۵
	«ادامه در صفحه ی بعد»	

۱/۵	۱۶ راس دلخواه v_i از گراف را در نظر می گیریم. (۰/۲۵) هر یال مانند q_i که به v_i و v_j وصل است ۱ واحد در $\deg v_i$ و ۱ واحد در $\deg v_j$ شامل می شود. (۰/۵) بنابراین هر یال ۲ واحد در مجموع درجه ها شامل می شود (۰/۲۵) بنابراین: $\deg v_1 + \deg v_2 + \dots + \deg v_p = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_q = 2q \quad (۰/۲۵)$ (۰/۲۵)	
۰/۷۵	الف) (۰/۲۵) ب) ۱۰ (۰/۲۵) پ) (۰/۲۵)	

لطفا به سایر راه حل های درست به تناسب نمره تقسیم کنید.