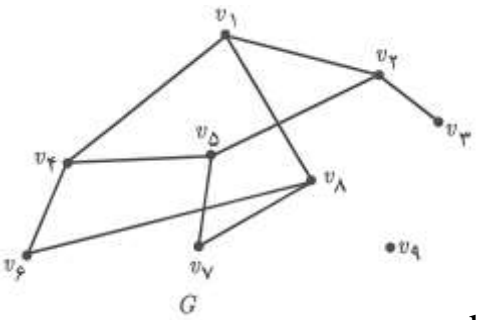


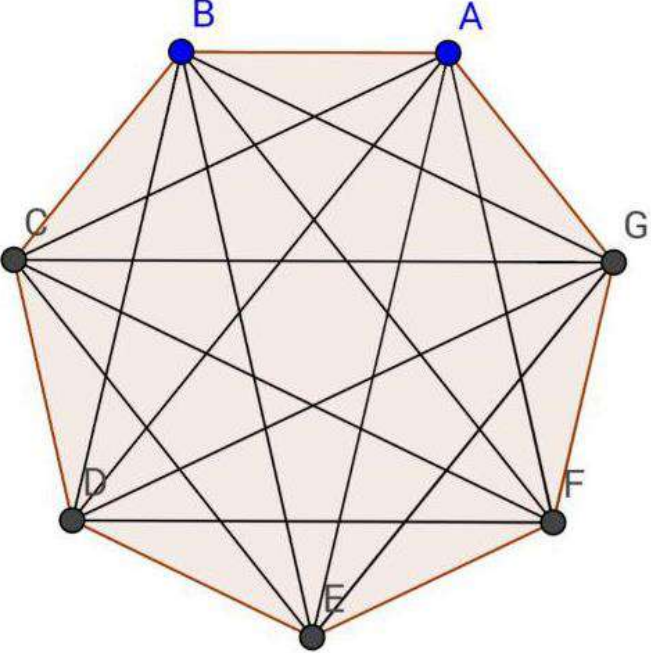
بسمه تعالی

آزمون درس: ریاضیات گسسته	اداره کل آموزش و پرورش استان	تاریخ آزمون:
رشته و پایه: ریاضی دوازدهم	دی ماه سال تحصیلی	ساعت شروع آزمون: ۸:۰۰ صبح
نام و نام خانوادگی:	دبیرستان	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه
نمره به عدد:	نمره به حروف:	نام دبیر:

۲	<p>۱ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p> <p>«الف» نادرست است. زیرا به ازای $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$</p> <hr/> <p>(ب) اگر $n \in N$ و n^2 زوج باشد، آن گاه n نیز زوج است.</p> <p>«ب» درست است. زیرا:</p> <p>فخ: فرض می کنیم n فرد باشد داریم:</p> $n = 2k + 1 \xrightarrow{p.2} n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 2m + 1$ <p>$n^2 = 2m + 1$ با فرض اصلی (n^2 زوج است) در تناقض است لذا فخ باطل و حکم صادق است.</p> <hr/> <p>(ج) تعداد گراف های r - منتظم از مرتبه ۵ برابر است با: ۳</p> <p>«ج» درست است زیرا:</p> <p>نکته: تعداد گراف های ۲ - منتظم یا $(p - 3)$ - منتظم از مرتبه p برابر است با تعداد حالت های که می توان عدد p را به صورت مجموع چند عدد بزرگتر از ۲ نوشت. هم چنین تمام p ضلعی ها، ۲ - منتظم است.</p> <p>حل: چون گراف فرد منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد پس $r \in \{0, 2, 4\}$ از طرفی تعداد گراف های ۲ - منتظم از مرتبه ۵ برابر است با: ۱ در نتیجه تعداد گراف های r - منتظم از مرتبه ۵ برابر است با: ۳</p> <p>(د) تعداد رئوس زوج در هر گراف ساده از مرتبه p همواره عددی فرد است. i درست ii نادرست</p> <p>«د» نادرست است. زیرا:</p> <p>نکته: تعداد رئوس زوج بستگی به مرتبه گراف دارد یعنی:</p> <p>تعداد رئوس زوج فرد است \rightarrow فرد $p =$</p> <p>تعداد رئوس زوج، زوج است \rightarrow زوج $p =$</p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) حاصل $[(80, 32), 16]$ برابر است با: ۱۶</p> $[(80, 32), 16] = [16(5, 2), 16] = 16[1, 1] = 16 \times 1 \times 1 = 16$ <p>(ب) معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب است اگر و تنها اگر:</p> <p>معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) c$</p> <p>(ج) رقم یکان عدد $A = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 50!$ برابر است با: ۳</p>	

	<p>فاکتوریل اعداد بزرگتر از ۴ به صفر ختم می شوند. لذا رقم یکان $A = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ برابر است با: ۳</p> <p>(د) باقی مانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر ۹ برابر است با: ۲</p> <p style="text-align: right;">(حل) $4 + 9 + 8 + 5 + 3 + 2 + 7 \equiv 2 \pmod{9}$</p>	
۱.۲۵	<p>اگر a و b هر دو عدد گنگ باشند و $a + b$ گویا باشند آنگاه $a + nb$ که در آن $(n \in \mathbb{Z} \text{ و } n \neq 1)$ گنگ است. فح: فرض می کنیم $a + nb$ گنگ نباشد. پس:</p> $\left. \begin{array}{l} a + nb \in \mathbb{Q} \\ a + b \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \xrightarrow{-} a + nb - a - b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{n-1} \in \mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{l} (n-1)b \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n-1} \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} (n-1)b \times \frac{1}{n-1} \in \mathbb{Q}$ <p>$\xrightarrow{n \neq 1} b \in \mathbb{Q}$</p> <p>$b \in \mathbb{Q}$ با فرض اصلی $b \in \mathbb{Q}'$ در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p>	۲
۱.۵	<p>گزاره زیر را به روش اثبات بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ <p>برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow$ $x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ <p>(حل)</p> <p>$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ همواره برقرار است لذا حکم بنابه اثبات بازگشتی برقرار است.</p>	۳
۱.۵	<p>اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 7$ و $a \mid 7k + 6$، ثابت کنید a عددی اول است. (اثبات)</p> $a \mid 9k + 7 \xrightarrow{\times 7} a \mid 63k + 49 \Rightarrow a \mid 63k + 49 - 63k - 54 \Rightarrow a \mid -5 \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a = 5$ $a \mid 7k + 6 \xrightarrow{\times 9} a \mid 63k + 54$	۴
۱.۵	<p>اگر باقی مانده تقسیم a بر ۱۱ به ترتیب ۵ و ۹ باشد باقی مانده تقسیم $a - 2b$ بر ۱۱ را بیابید. (اثبات)</p> $a = 11k + 5 \xrightarrow{\times 1} a = 11k + 5 \Rightarrow a - 2b = 11(k - 2q) - 13 = 11t - 13 = 11t - 13 + 22 - 22$ $b = 11q + 9 \xrightarrow{\times 2} 2b = 22q + 18$ $\Rightarrow a - 2b = 11t + 9 - 22 = 11(t - 1) + 9 = 11s + 9$	۵
۱.۷۵	<p>باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{19} - 7) \times 13$ بر ۲۳ به دست آورید. (حل)</p> $\left. \begin{array}{l} 2^6 \equiv -5 \pmod{23} \xrightarrow{p \cdot 2} 2^{12} \equiv 25 \equiv 2 \pmod{23} \\ 2^7 \equiv 13 \pmod{23} \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} 2^{19} \equiv 26 \pmod{23} \xrightarrow{-7} (2^{19} - 7) \equiv 19 \pmod{23}$ $\xrightarrow{\times 13} (2^{19} - 7) \times 13 \equiv 19 \times 13 \equiv (-4) \times 13 \equiv -52 \equiv 17 \pmod{23}$	۶

۱.۵	<p>معادله همنهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل نموده و جواب عمومی آن را به دست آورید.</p> <p>حل معادله همنهشتی داده $5x \equiv 2 \pmod{11}$ دارای جواب است زیرا: $(5, 11) = 1 \mid 2$</p> $5x \equiv 2 \pmod{11} \xrightarrow{-2 \times 11} 5x \equiv 2 - 22 \equiv -20 \pmod{11} \xrightarrow{\div 5} (5, 11) = 1 \rightarrow x \equiv -4 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k - 4, \quad k \in \mathbb{Z}$	۷														
۱.۵	<p>اگر دهم دی ماه سالی دوشنبه باشد، ۳۱ تیر ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟</p> <p>حل تعداد روزها بین دو تاریخ داده شده را پیدا نموده آن را با A نشان می دهیم چون روزی را می خواهد که قبل از دهم دی ماه است لذا باقی مانده $A -$ به پیمان ۷ را محاسبه می کنیم.</p> $A = (31 - 31) + 2 \times 31 + 3 \times 30 + 10 = 162 \Rightarrow -162 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow -1 \equiv 6 \pmod{7}$ <table border="1" data-bbox="188 607 1436 712"> <thead> <tr> <th>دوشنبه</th> <th>سه شنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>پنجشنبه</th> <th>جمعه</th> <th>شنبه</th> <th>یکشنبه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </tbody> </table>	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸
دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۱.۵	<p>شخصی در یک مسابقه پرتاب دات شرکت کرده و در هر پرتاب ۵ یا ۳ امتیاز و در مجموع ۲۳ امتیاز کسب کرده است تعداد پرتاب های ۵ امتیازی این شخص را بیابید.</p> <p>حل x: تعداد پرتاب های ۵ امتیازی و y: تعداد پرتاب های ۳ امتیازی</p> <p>معادله همنهشتی نوشته شده دارای جواب است. $(5, 3) = 1 \mid 23 \Rightarrow (5, 3) = 1$</p> $5x + 3y = 23 \Rightarrow (5, 3) = 1 \mid 23 \Rightarrow (5, 3) = 1$ $5x \equiv 23 \pmod{3} \xrightarrow{-3} 5x \equiv 2 \pmod{3} \xrightarrow{\div 5} (5, 3) = 1 \rightarrow x \equiv 4 \pmod{3} \xrightarrow{-3} x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$ $5(3k + 1) + 3y = 23 \Rightarrow 15k + 5 + 3y = 23 \Rightarrow 3y = 18 - 15k \xrightarrow{\div 3} y = 6 - 5k$ $\begin{cases} x = 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{-1}{3} \\ y = 6 - 5k \geq 0 \Rightarrow \frac{6}{5} \geq k \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq k \leq \frac{6}{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1$ <p>تعداد پرتاب های ۵ امتیازی برابر است با: $x = 3(1) + 1 = 4$ و $x = 3(0) + 1 = 1$</p>	۹														
۲	<p>با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف G را بنویسید.</p> <p>ب) یک $v_1 - v_8$ مسیر به طول ۳ بنویسید.</p> <p>جواب: $v_1 v_4 v_6 v_8$ مسیری به طول ۳ است.</p> <p>ج) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>جواب: $v_1 v_4 v_6 v_8 v_1$ یا $v_1 v_4 v_5 v_2 v_1$ دور به طول ۴ است.</p> <p>د) درجه v_5 در گراف \bar{G} را تعیین کنید.</p> <p>جواب: $\deg_G(v_5) + \deg_{\bar{G}}(v_5) = p - 1 \Rightarrow 3 + x = 8 \Rightarrow x = 5$</p> <p>ه) آیا گراف همبند است؟ چرا؟</p> <p>جواب: همبند نیست زیرا از راس v_1 به راس v_9 مسیری وجود ندارد.</p> <p>و) $N_G(v_4)$ و $N_G[v_3]$ را بنویسید.</p> 	۱۰														

	$N_G[v_3] = \{v_3, v_4\}$ و $N_G(v_4) = \{v_1, v_5, v_6\}$	
۱	<p>گرافی از مرتبه ۱۲ و اندازه ی ۲۲ فقط رئوس از درجه ۳ و ۵ دارد، این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟</p> <p>(حل)</p> $x \xrightarrow{\times} 3x \quad +$ <p>۳ راس از درجه ۳</p> $12-x \xrightarrow{\times} 5 \times (12-x)$ <p>۵ راس از درجه ۵</p> <p>-----</p> $3x + 5(12-x) = 2q \Rightarrow 60 - 2x = 2 \times 22 \Rightarrow 16 = 2x \Rightarrow x = 8$	۱۱
۱	<p>در گراف کامل k_p داریم: $p = \frac{1}{3}q$ نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>(حل)</p> $\left. \begin{array}{l} q_{k_p} = \frac{p(p-1)}{2} \\ q = 3p \end{array} \right\} \Rightarrow 3p = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 6p = p(p-1) \xrightarrow{\div p, p \neq 0} 6 = p-1$ <p>$p = 7$</p>	۱۲
		
۲۰	موفق و سر بلند باشید. جمع	